Proiect cofinanţat din Fondul Social European prin Programul Operaţional Capital Uman 2014-2020

Axa prioritară 6: *Educaţie şi competenţe*

Prioritatea de investiţii 10.i: *Reducerea şi prevenirea abandonului şcolar timpuriu şi promovarea accesului egal la învăţământul preşcolar, primar şi secundar de calitate, inclusiv la parcursuri de învăţare formale, nonformale şi informale pentru reintegrarea în educaţie şi formare*

Obiectivul specific 6.4: *Creşterea numărului de tineri care au abandonat şcoala şi de adulţi care nu şi-au finalizat educaţia obligatorie care se reîntorc în sistemul de educaţie şi formare, inclusiv prin programe de tip a doua şansă şi programe de formare profesională*

Obiectivul specific 6.6: *Îmbunătăţirea competenţelor personalului didactic din învăţământul preuniversitar în vederea promovării unor servicii educaţionale de calitate orientate pe nevoile elevilor şi a unei şcoli inclusive*

Titlu proiect: *"Acces la programe de educaţie şi formare profesională pentru tinerii şi adulţii din judeţul Dolj care au părăsit timpuriu şcoala (I)"*

Cod SMIS 2014+: *135711*

MATERIALE DE PREDARE-ÎNVĂŢARE
MATEMATICĂ

Modulul M2

Program „A doua șansă” pentru învățământ secundar inferior
versiune finală

A.3.1 Organizarea, monitorizarea şi evaluarea programului „A doua şansă” şi a stagiilor de pregătire practică de 720 de ore

POPESCU LUMINIŢA VIORICA CRISTINA
Expert curriculum (Matematică)

Iulie 2023

UNIUNEA EUROPEANĂ

Instrumente Structurale 2014-2020

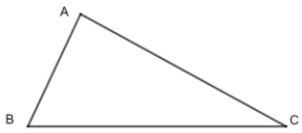
TRIUNGHIUL

La finalul unității de învățare, elevul va fi capabil:

- să identifice elementele și proprietățile triunghiului;
- să utilizeze corect noțiunile de congruență și asemănare;
- să stabilească poziția elementelor geometrice în desen: paralelism, perpendicularitate, congruențe, asemănări;
- să compare unghiuri și triunghiuri.

Triunghiul: recunoaștere, reprezentare prin desen, identificarea elementelor

Dacă A, B, C sunt trei puncte necoliniare, atunci reuniunea segmentelor AB, AC, BC formează ***triunghiul*** ABC.

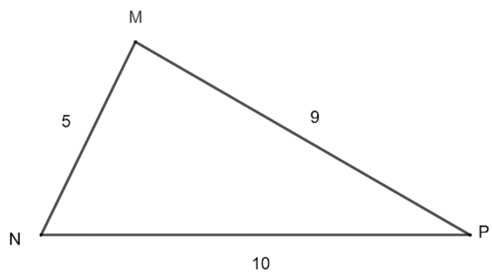
Desenăm	***Citim***	***Scriem***
	*triunghiul* ABC	$\Delta\ ABC$

- ✓ ***Triunghiul*** este reuniunea segmentelor determinate de trei puncte necoliniare.
- ✓ *Elementele* unui triunghi sunt laturile şi unghiurile sale.
- ✓ Un triunghi are 3 laturi şi 3 unghiuri.
- ✓ Segmentele AB, AC, BC se numesc *laturile* triunghiului ABC.
- ✓ $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C$ se numesc *unghiurile* triunghiului ABC.
- ✓ Punctele A, B, C se numesc *vârfurile* triunghiului ABC.
- ✓ ***Perimetrul*** unui triunghi este egal cu suma lungimilor laturilor sale.

$$P_{ABC} = AB + AC + BC$$

Exemple:

- ✎ Vârfurile $\Delta\ MNP$ sunt punctele M, N și P.
- ✎ Laturile $\Delta\ MNP$ sunt segmentele MN, MP și NP.
- ✎ Unghiurile $\Delta\ MNP$ sunt $\sphericalangle M, \sphericalangle N$ și $\sphericalangle P$.
- ✎ Latura MP se opune $\sphericalangle N$.
- ✎ $\sphericalangle P$ se opune laturii MN.
- ✎ $P_{MNP} = MN + MP + NP = 5 + 9 + 10 = 24\ cm$

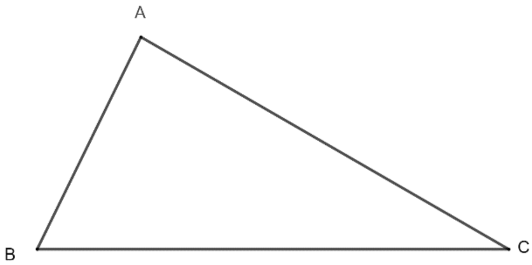


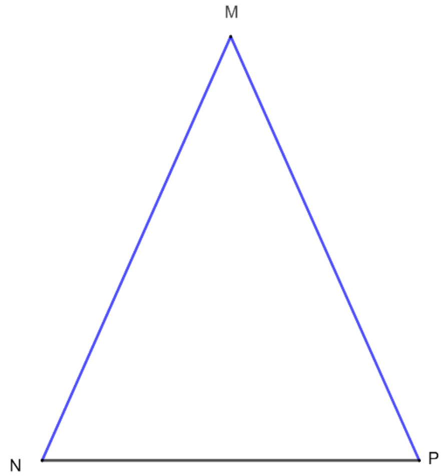
Clasificarea triunghiurilor în funcție de lungimile laturilor

- ✓ Un triunghi care are laturile de lungimi diferite se numește triunghi *oarecare*.
- ✓ Un triunghi care are două laturi de lungimi egale se numește triunghi *isoscel*. Cea de a treia latură se numește bază.
- ✓ Un triunghi care are laturile de lungimi egale se numește triunghi *echilateral*.

Exemple:

✐ $\Delta\, ABC$ este un triunghi oarecare.



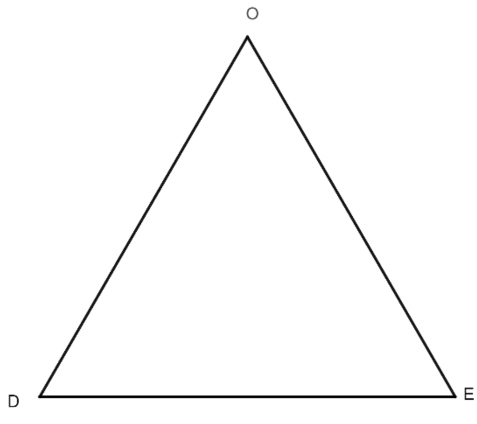


✐ $\Delta\, MNP$este un triunghi isoscel de bază NP.

$$MN = MP$$

✐ $\Delta\, ODE$ este un triunghi echilateral.

$$OD = OE = DE$$

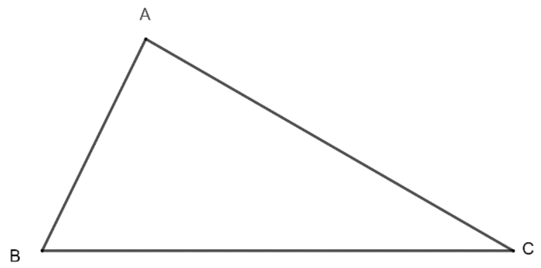


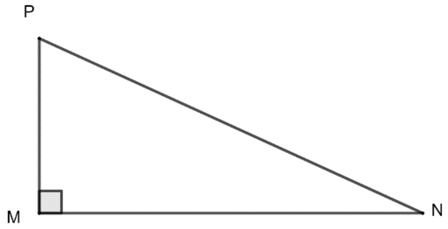
Clasificarea triunghiurilor în funcție de măsurile unghiurilor

- ✓ Un triunghi care are toate unghiurile ascuțite se numește triunghi ***ascuţitunghic***.
- ✓ Un triunghi care un unghi drept se numește triunghi ***dreptunghic***. Latura opusă unghiului drept se numește ***ipotenuză***. Laturile alăturate unghiului drept de numesc ***catete***.
- ✓ Un triunghi care are un unghi obtuz se numește triunghi ***obtuzunghic***.

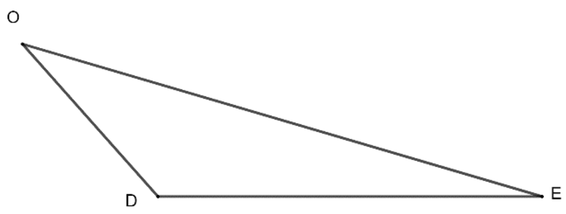
Exemple:

✎ $\Delta\, ABC$ este un triunghi ascuţitunghic.





✎ $\Delta\, MNP$ este un triunghi dreptunghic;
NP este ipotenuză;
MN şi MP sunt catete.



✎ $\Delta\, ODE$ este un triunghi obtuzunghic.

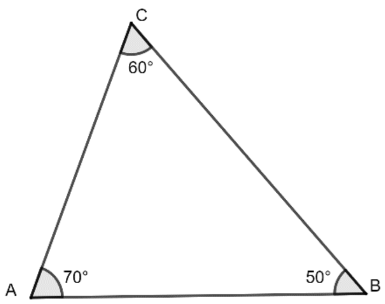
✓ Suma unghiurilor unui triunghi este 180°.

✓ Unghiurile triunghiului echilateral au măsura 60°.

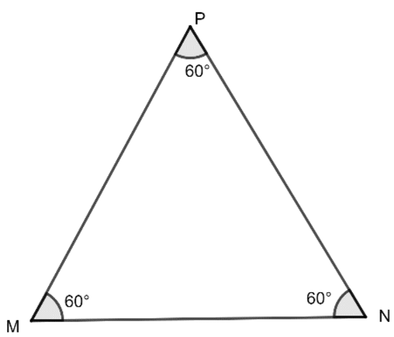
Exemple:

✎ $\Delta\, ABC$ este un triunghi ascuţitunghic.

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 70° + 50° + 60° = 180°$$

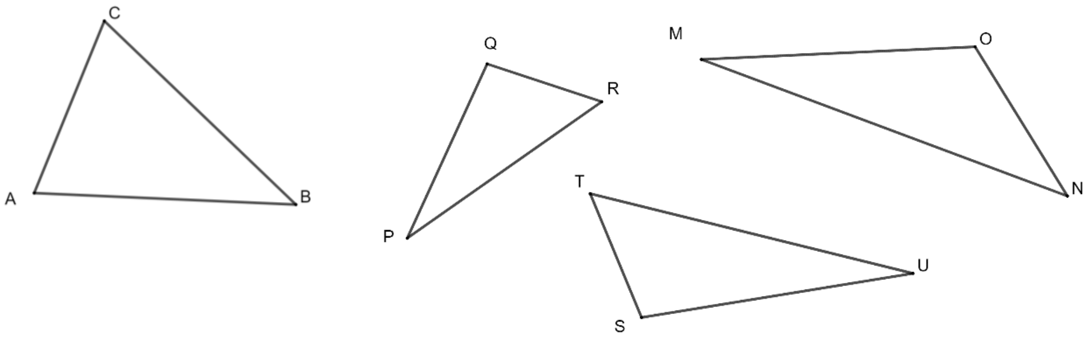


✎ $\Delta\, MNP$ este un echilateral.



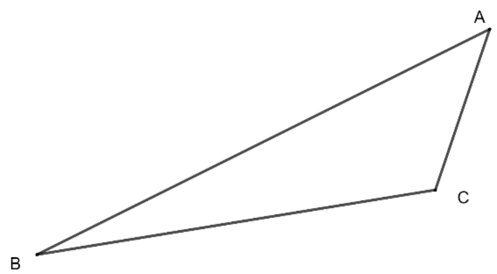
Să exersăm!

1. Pentru fiecare din triunghiurile de mai jos completați după model tabelul:



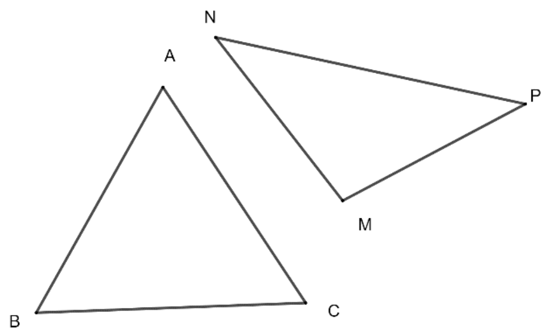
Triunghiul	$\Delta\, ABC$	$\Delta\, MNO$	$\Delta\, PQR$	$\Delta\, TSU$
Laturile triunghiului	AB, BC, AC			
Unghiurile triunghiului	$\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C$			
Vârfurile triunghiului	A, B, C			

2. Folosind desenul de mai jos stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții.
   a) Latura AC se opune $\sphericalangle A$. A F
   b) Unghiul opus laturii BA este $\sphericalangle C$. A F
   c) Latura opusă $\sphericalangle B$ este AB. A F
   d) Latura opusă $\sphericalangle C$ este AB. A F
   e) Unghiul opus laturii AC este $\sphericalangle B$. A F
   f) Latura opusă $\sphericalangle C$ este BC. A F

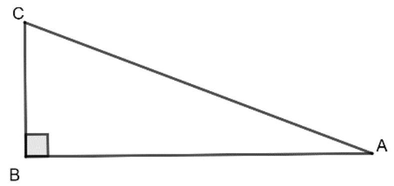


3. Folosind desenul de mai jos stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții.

a) $BC = AB$. A F
b) $AB = AC$. A F
c) $\Delta\, ABC$ este isoscel de bază BC. A F
d) $\sphericalangle B = \sphericalangle C$. A F
e) $\sphericalangle B = \sphericalangle A$. A F
f) $MN = MP$. A F
g) $\Delta\, MNP$ este isoscel de bază MP. A F
h) $\sphericalangle P = \sphericalangle M$. A F
i) $\sphericalangle N = \sphericalangle P$. A F



4. În triunghiul ABC măsura $\sphericalangle B = 90°$. Folosind desenul de mai jos stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:



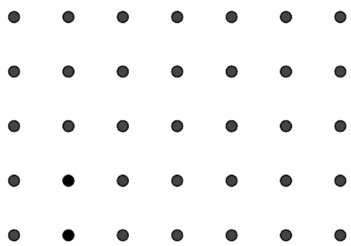
a) BC este ipotenuza $\Delta\, ABC$. A F

b) AC este o catetă în $\Delta\, ABC$. A F

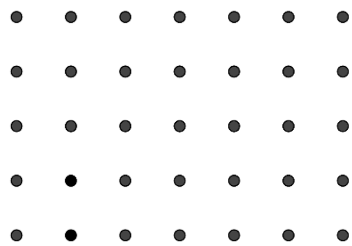
c) AB este o catetă în $\Delta\, ABC$. A F

d) $AC = BC$ A F

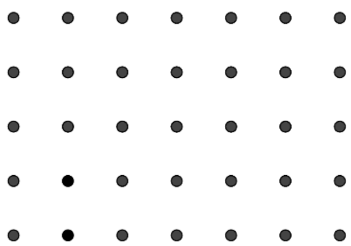
5. Uniți punctele de mai jos pentru a obține :



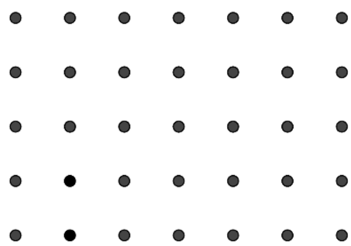
a) Un triunghi isoscel;



b) Un triunghi dreptunghic;

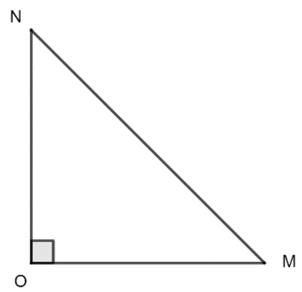


c) Un triunghi obtuzunghic;



d) Un triunghi ascuțitunghic oarecare.

6. În triunghiul MON isoscel măsura $\sphericalangle O = 90°$. Folosind desenul de mai jos stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:



a) $MN = ON$. A F

b) MN este o catetă în $\Delta\, OMN$. A F

c) $OM = ON$. A F

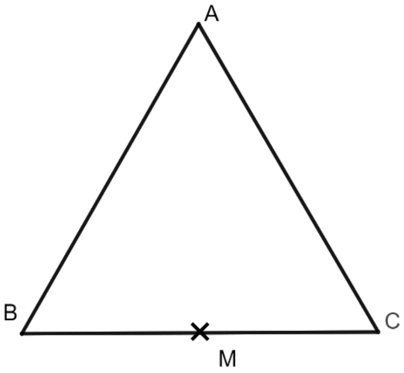
d) $\sphericalangle M = 45°$. A F

e) MN este o catetă în $\Delta\, OMN$. A F

f) ON este o catetă în $\Delta\, OMN$. A F

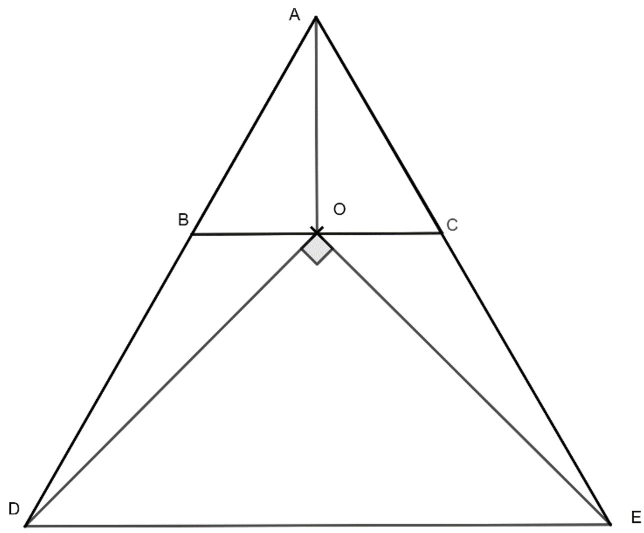
g) $\sphericalangle N = 45°$. A F

7. În triunghiul ABC echilateral M este mijlocul laturii BC. Folosind desenul de mai jos stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:
   a) $AB = BC$. A F
   b) $\sphericalangle C = 60°$. A F
   c) $\sphericalangle MBA = 90°$. A F
   d) $\sphericalangle AMB = 90°$. A F
   e) $\sphericalangle MAC = 30°$. A F
   f) $\sphericalangle CAB = 60°$. A F



8. Folosind desenul alăturat identificați cât mai multe:
   a) Triunghiuri dreptunghice

   b) Triunghiuri obtuzunghice



   c) Triunghiuri echilaterale

9. Completați enunțurile următoare cu unul dintre termenii *ascuțitunghic, obtuzunghic* sau *dreptunghic* pentru a obține afirmații adevătate:
   a) În triunghiul ABC dacă măsura $\sphericalangle ABC = 100°$ atunci triunghiul este___________.
   b) În triunghiul ABC dacă măsura $\sphericalangle C = 90°$ atunci triunghiul este___________.
   c) În triunghiul ABC dacă măsura $\sphericalangle A = 40°$, $\sphericalangle A = 60°, \sphericalangle A = 70°$ atunci triunghiul este___________.

d) În triunghiul ABC dacă măsura $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60°$ atunci triunghiul este___________.

e) În triunghiul ABC dacă măsura $\sphericalangle A = 50°, \sphericalangle B = 20°$, atunci triunghiul este___________.

10. a) În triunghiul ABC măsura $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 40°$. Determinaţi măsura unghiului C.

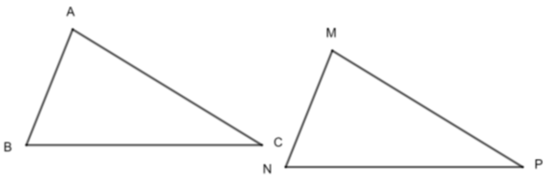
b) În triunghiul ABC măsura $\sphericalangle C = \sphericalangle B = 45°$. Determinaţi măsura unghiului A.

c) În triunghiul ABC măsura $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 70°$. Determinaţi măsura unghiului C.

d) În triunghiul ABC măsura $\sphericalangle A = 70°, \sphericalangle B = 40°$. Determinaţi măsura unghiului C.

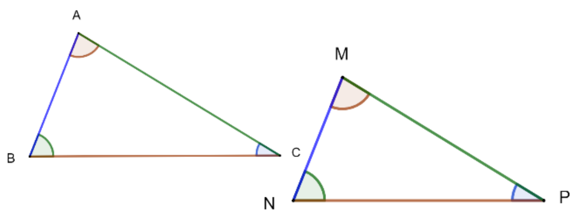
Congruența triunghiurilor: recunoaștere, descriere, verificare prin metode intuitive

- ✓ Două figuri plane sunt considerate ***congruente*** dacă prin suprapunere coincid.
- ✓ Două triunghiuri sunt ***congruente*** dacă prin suprapunere coincid.
- ✓ Altfel spus: triunghiurile care au elementele corespunzătoare congruente două câte două, se numesc triunghiuri congruente.

Desenăm	***Citim***	***Scriem***
	*triunghiul* ABC este congruent cu *triunghiul* MNP	$\Delta\, ABC \equiv \Delta\, MNP$

Dacă $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, MNP$ atunci avem

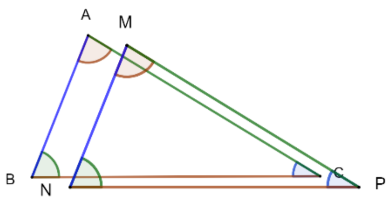
- $AB = MN$
- $AC = MP$
- $BC = NP$
- $\sphericalangle A = \sphericalangle M$
- $\sphericalangle B = \sphericalangle N$
- $\sphericalangle C = \sphericalangle P$



Cum recunoaștem două triunghiuri congruente

Două triunghiuri sunt congruente dacă

1. le decupăm și le suprapunem, atunci triunghiurile coincid.

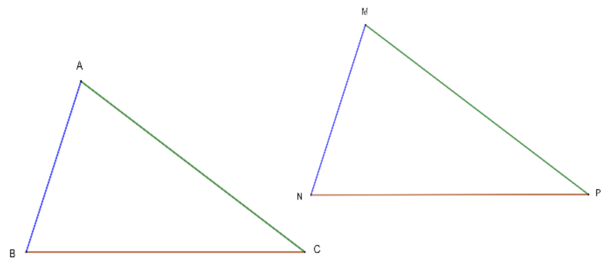


2. măsurând laturile obținem trei perechi de laturi congruente. (fiecare pereche are o latură din fiecare triunghi) - Cazul (L.L.L.)

Dacă

$AB = MN$
$AC = MP$
$BC = NP$

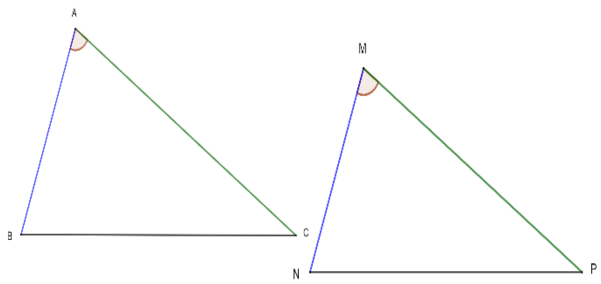
atunci $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, MNP$



3. măsurând găsim două perechi de laturi congruente și unghiurile dintre ele egale. - Cazul (L.U.L.)

Dacă
- $AB = MN$
- $AC = MP$
- $\sphericalangle A = \sphericalangle M$

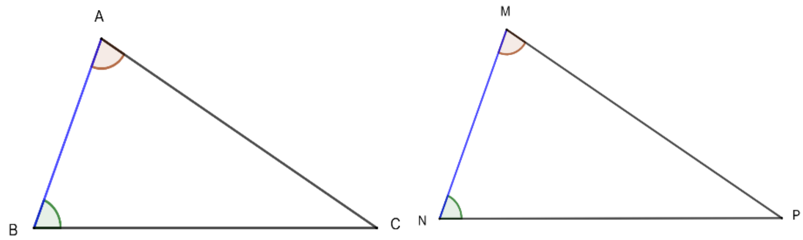
atunci $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, MNP$



4. măsurând găsim două perechi de unghiuri congruente și laturile dintre ele egale. - Cazul (U.L.U.)

Dacă
- $AB = MN$
- $\sphericalangle A = \sphericalangle M$
- $\sphericalangle B = \sphericalangle N$

atunci $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, MNP$

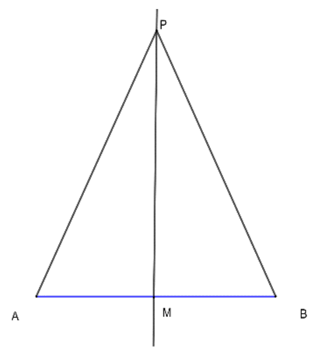


Exemple:

✐ Dacă PM este mediatoarea segmentului AB, unde M reprezintă mijlocul segmentului AM atunci $\Delta\, PBM \equiv \Delta\, PAM$.

Avem
- $BM = AM$(M mijlocul segmentului AB)
- PM -latură comună
- măsurăm şi găsim $AP = PB$

deci $\Delta\, PBM \equiv \Delta\, PAM$ (L.L.L)

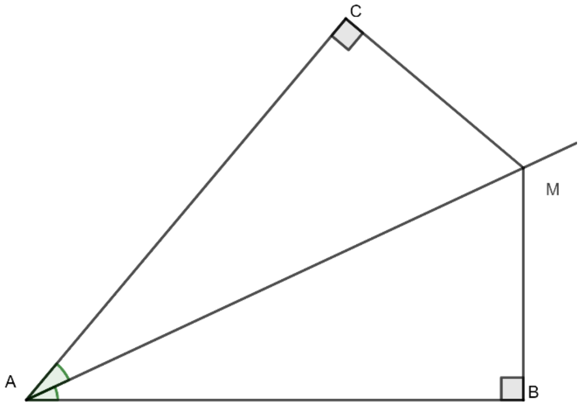


✐ Dacă AM este bisectoarea unghiului BAC, iar $MB \perp AB$ şi $MC \perp AC$ atunci $\Delta\, ABM \equiv \Delta\, ACM$ şi $CM = BM$.

Avem

- $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAM$ (AM este bisectoarea unghiului BAC
- AM -latură comună
- măsurăm şi găsim $\sphericalangle BMA = \sphericalangle CMA$

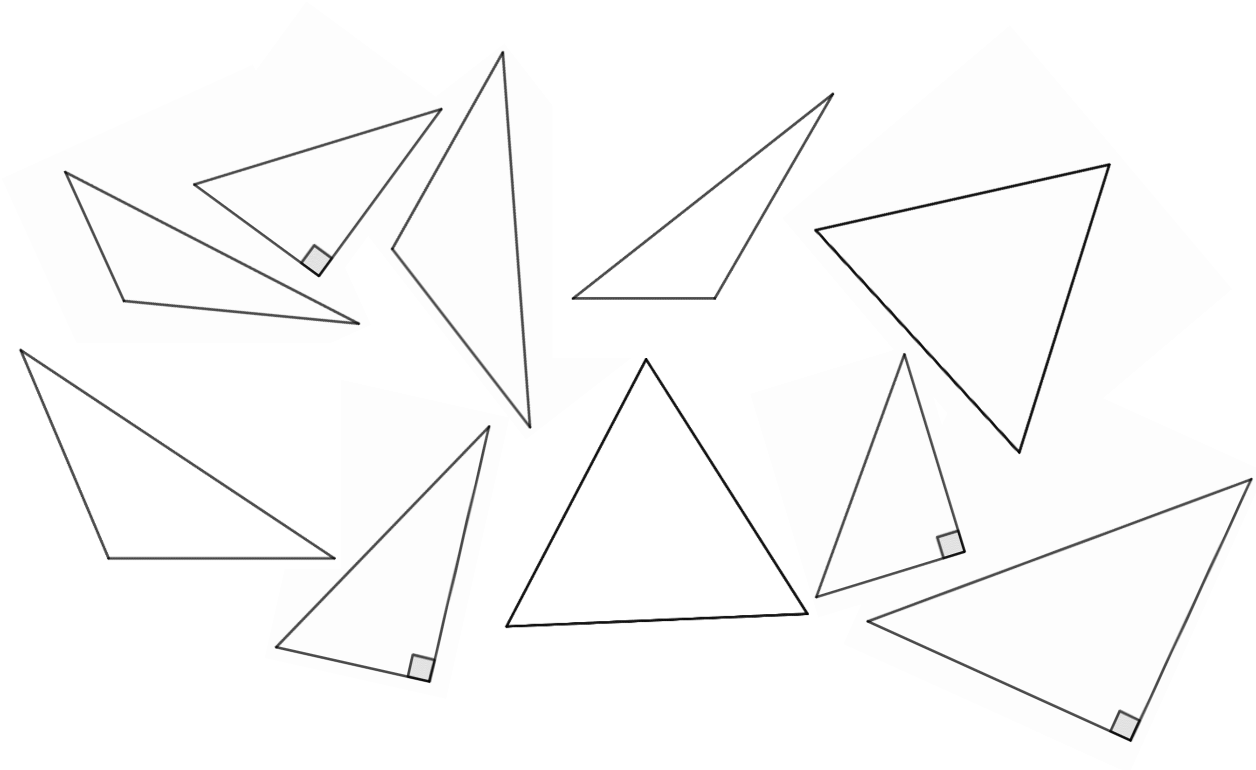
deci $\Delta\, ABM \equiv \Delta\, ACM$ (U.L.U)



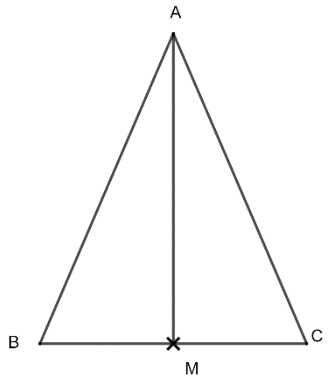
Deoarece $\Delta\, ABM \equiv \Delta\, ACM$ avem $BM = CM$.

Să exersăm!

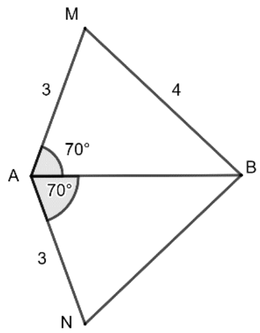
1. Găsiți în figura de mai jos perechile de triunghiuri congruente și colorați fiecare pereche de triunghiuri congruente cu aceeași culoare.



2. În triunghiul isoscel ABC de bază BC punctul M este mijlocul laturii BC. Arătați că $\Delta\, ABM \equiv \Delta\, ACM$. (poţi folosi figura alăturată).



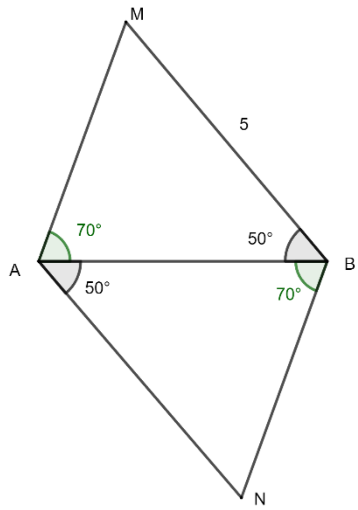
3. Punctele M şi N sunt situate de o parte şi de alta a segmentului AB astfel încât $AM = AN = 3\ cm$. În plus $\sphericalangle MAB = \sphericalangle NAB = 70°$, iar $MB = 4\ cm$.
   a) Arătaţi că $\Delta\, MAB \equiv \Delta\, NAB$.



   b) Determinaţi lungimea segmentului BN.

4. Punctele M şi N sunt situate de o parte şi de alta a segmentului AB astfel încât $\sphericalangle MAB = \sphericalangle NBA = 70°$, iar $\sphericalangle MBA = \sphericalangle NAB = 50°$. În plus $MB = 5\ cm$.

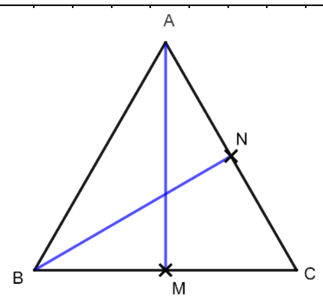
   a) Arătaţi că $\Delta\, MAB \equiv \Delta\, NBA$.



   b) Determinaţi lungimea segmentului AN.

5. Punctele M și N sunt mijloacele laturilor $BC,\ AC$ ale triunghiului echilateral ABC.

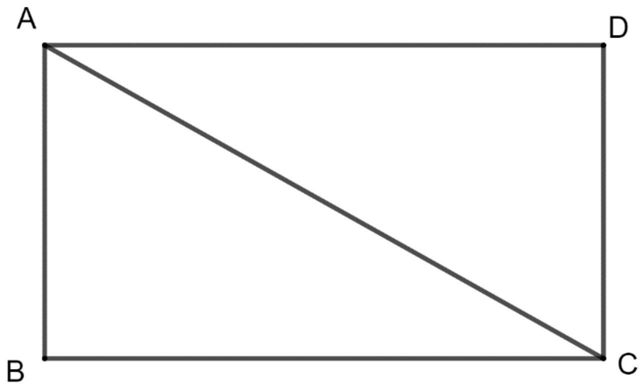
   a) Arătaţi că $\Delta\, MAB \equiv \Delta\, MAC$.



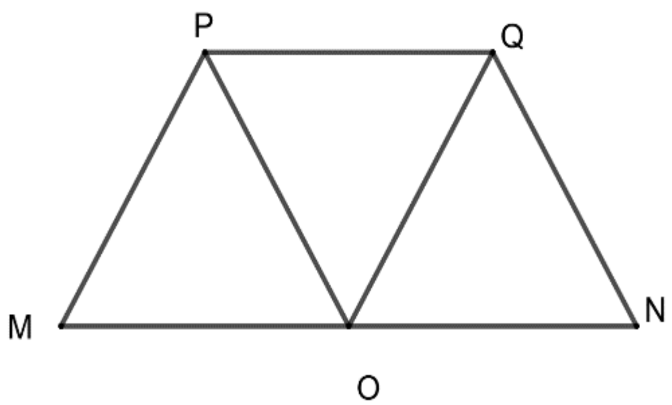
   b) Arătaţi că $\Delta\, MAB \equiv \Delta\, NBC$.

c) Arătaţi că $AM = BN$.

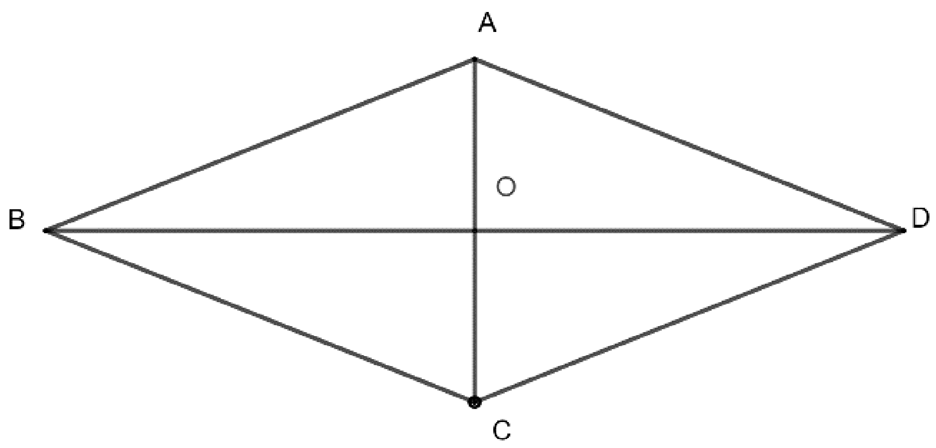
6. În figura de mai jos $AD \parallel BC$ și $AB \parallel DC$. Verificați dacă $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, CDA$.



7. În figura de mai jos $OM = ON = OP = OQ$ şi $\sphericalangle MOP = \sphericalangle POQ = QON$.
Verificați dacă $\Delta\, MOP \equiv \Delta\, QOP$ şi $\Delta\, POQ \equiv \Delta\, QON$.



8. Decupați figura de mai jos, în care $AB = BC = CD = DA$ ($ABCD$ este un romb). Cu ajutorul decupajului obținut stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor afirmații:
   a) $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, ADC$ A F
   b) $\Delta\, ABD \equiv \Delta\, CBD$ A F
   c) $\Delta\, ABO \equiv \Delta\, CBO$ A F
   d) $\Delta\, AOB \equiv \Delta\, AOD$ A F
   e) $\Delta\, AOB \equiv \Delta\, COD$ A F
   f) $\sphericalangle\, ABO \equiv \sphericalangle CBO$ A F

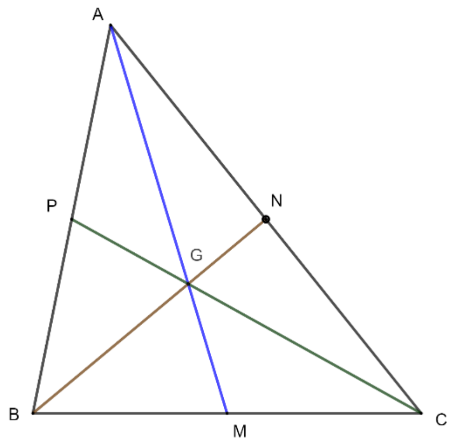


Mediana

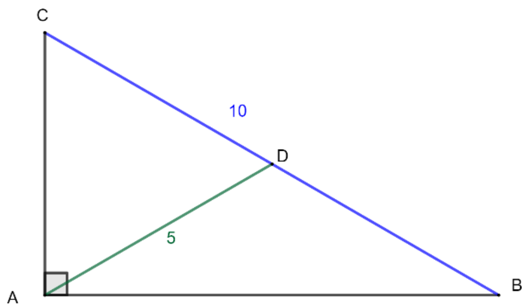
- ✓ ***Mediana*** este segmentul care unește un vârf al unui triunghi cu mijlocul laturii opuse.
- ✓ Orice triunghi are 3 mediane.
- ✓ În orice triunghi cele trei mediane se intersectează într-un punct numit centru de greutate al triunghiului. Acest punct se notează G.

Exemple:

- În triunghiul ABC segmentele AM, BN, CP sunt mediane.



- În triunghiul dreptunghic ABC segmentul AD este mediană.
  În plus observăm că $2 \cdot AD = BC$.



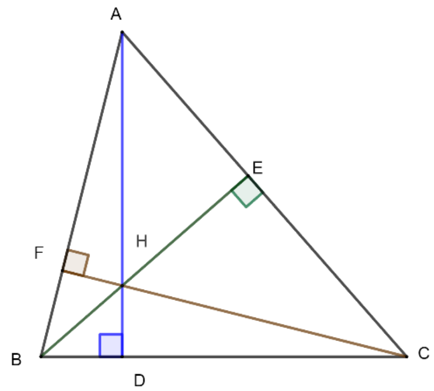
Într-un orice triunghi dreptunghic *mediana corespunzătoare unghiului drept este jumătate din ipotenuză.*

Înălţimea

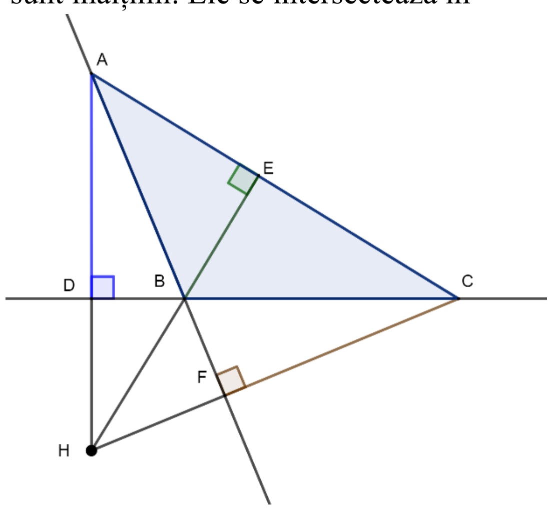
- ✓ ***Înălţimea*** este segmentul dus dintr-un vârf al unui triunghi perpendicular pe latura opusă. Celălalt capăt al înălțimii este situat pe latura opusă.
- ✓ Lungimea înălţimii este egală cu distanţa de la vârf la latura opusă.
- ✓ Orice triunghi are 3 înălțimi.
- ✓ În orice triunghi cele trei înălțimi se intersectează într-un punct notat cu H.

Exemple:

✎ În triunghiul ABC segmentele AD, BE, CF sunt înălțimi.

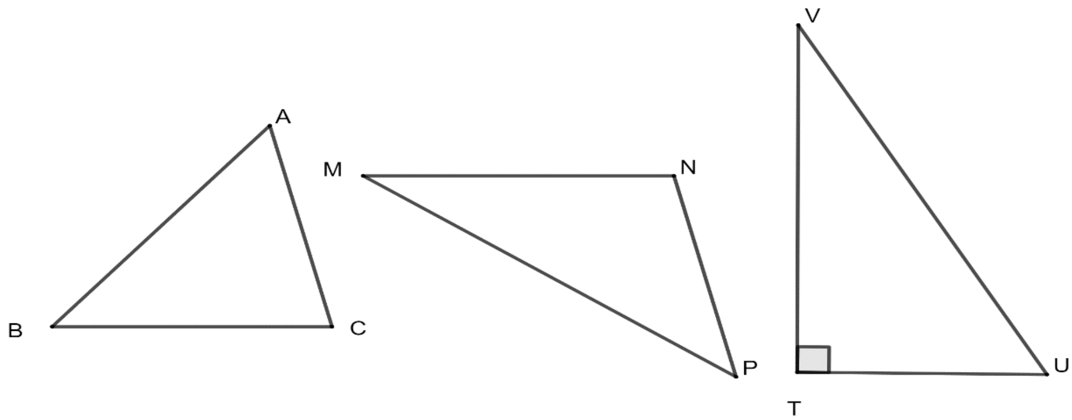


✎ În triunghiul ABC segmentele AD, BE, CF sunt înălțimi. Ele se intersectează în exteriorul triunghiului ABC.



Să exersăm!

1. Completează figurile geometrice de mai jos pentru a obține afirmații adevărate:



a) Segmentul AD este mediană în triunghiul ABC.
b) Segmentul PQ este mediană în triunghiul MNP.

c) Segmentul MO este mediană în triunghiul MNP.

d) Segmentul TS este mediană în triunghiul TUV.

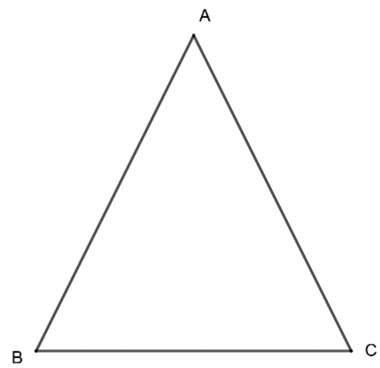
e) Segmentul OR este mediană în triunghiul MOP.

2. În figura alăturată triunghiul ABC este isoscel, $AB = AC$.

a) Construiți în triunghiul ABC medianele BM și CN.

b)

c) Măsurați lungimile segmentelor BM și CN.



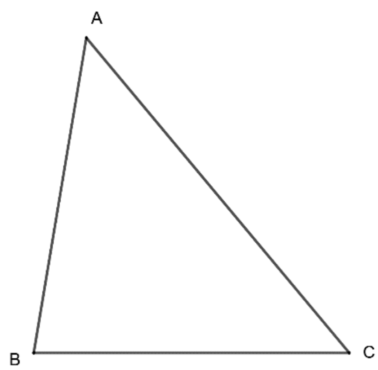
d) Cu ajutorul riglei stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor afirmații:

- $BM = CN$ A F
- $AM = AN$ A F
- $\Delta\, AMN$ este isoscel. A F

3. În triunghiul ABC medianele AM și BN se intersectează în punctul G. Dreapta CG intersectează latura AC în punctul P.

a) Completați desenul alăturat cu informațiile din enunț.

b) Utilizând figura obținută, determinați cu ajutorul riglei lungimile segmentelor AP, BP, GB, AG, BN, GM, GN, AM.



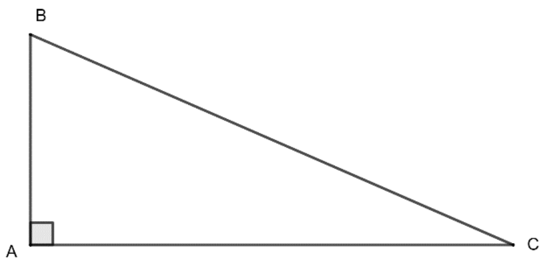
c) Pentru valorile găsite la punctul b) stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor afirmații:

- $3GB = 2BN$ A F
- $GB = 2GN$ A F
- $3AG = 2AM$ A F
- $AG = 2GM$ A F
- Segmentul CP este mediană în $\Delta\, ABC$. A F

4. În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, AM este mediana corespunzătoare vârfului A.

a) Completați desenul alăturat cu informațiile din enunț.

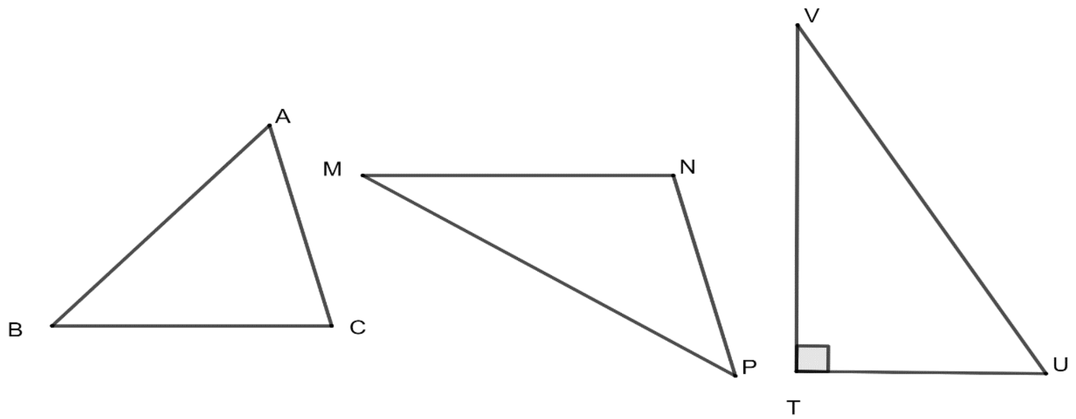
b) Utilizând figura obținută, determinați cu ajutorul riglei lungimile segmentelor AM, BM, CM.



c) Pentru valorile găsite la punctul b) stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor afirmații:

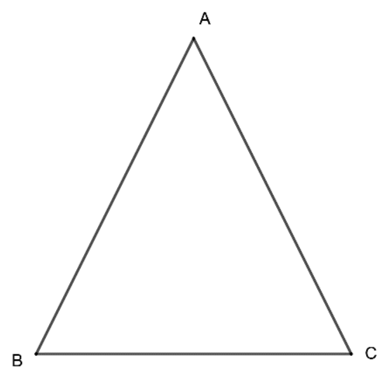
- $AM = MB$ A F
- $\Delta\, ABM$ este isoscel. A F

5. Completează figurile geometrice de mai jos pentru a obține afirmații adevărate:



a) Segmentul AD este înălțime în triunghiul ABC.
b) Segmentul PQ este înălțime în triunghiul MNP.
c) Segmentul MO este înălțime în triunghiul MNP.
d) Segmentul TS este înălțime în triunghiul TUV.
e) Segmentul OR este înălțime în triunghiul MOP.

6. În figura alăturată triunghiul ABC este isoscel, $AB = AC$.
a) Construiți în triunghiul ABC înălțimile BM și CN.
b) Măsurați lungimile segmentelor BM și CN.

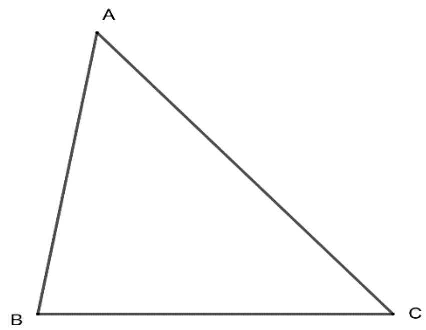


c) Cu ajutorul riglei stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor afirmații:
- $BM = CN$ A F
- $AM = AN$ A F
- $\Delta\, AMN$ este isoscel. A F

7. În triunghiul ABC înălțimile AD și BE se intersectează în punctul H. Dreapta CH intersectează latura AC în punctul F.

   a) Completați desenul alăturat cu informațiile din enunț.

   b) Utilizând figura obținută, determinați cu ajutorul raportorului măsurile unghiurilor $\sphericalangle ADE, \sphericalangle ADF, \sphericalangle ACF, \sphericalangle ABE, \sphericalangle BAD, \sphericalangle BEF, \sphericalangle BED$.



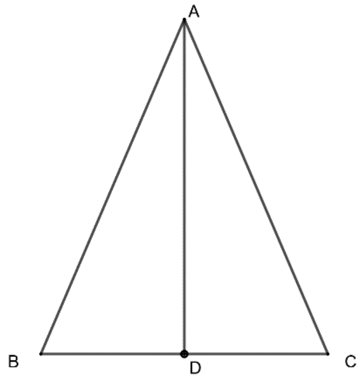
   c) Pentru valorile găsite la punctul b) stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor afirmații:

   - $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ACF$ A F
   - $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BDA$ A F
   - $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ADF$ A F
   - $\sphericalangle FEB = \sphericalangle DEB$ A F
   - Segmentul CF este înălțime în $\Delta\ ABC$. A F
   - EB este bisectoarea unghiului FED. A F

8. În triunghiul isoscel ABC, $AB = AC$, AD este mediana corespunzătoare vârfului A. Construim DE înălțimea din D în triunghiul ADC şi DF înălțimea din D în triunghiul ADB.

   a) Completați desenul alăturat cu informațiile din enunț.

   b) Arătați că $\Delta\, ADB \equiv \Delta\, ADC$.



   c) Arătați că $\sphericalangle FDA \equiv \sphericalangle FDE$.

   d) Arătați că $\Delta\, AFD \equiv \Delta\, AED$.

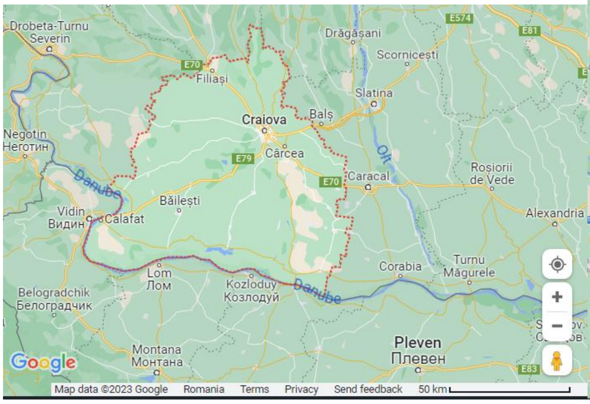
Asemănarea triunghiurilor

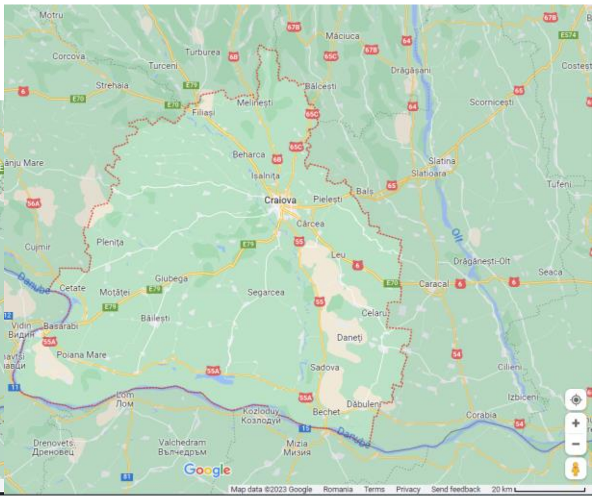
Despre două obiecte spunem că sunt *asemănătoare* dacă au *trăsături/proprietăți comune*. Statuia Libertății din Paris are elemente arhitecturale comune cu Statuia Libertății din New York, mânzul are trăsături comune cu părinții, bujorii din imagine seamănă foarte bine, fără a fi identici.

La noțiunea de asemănare a triunghiurilor se ajunge pe cale intuitivă, considerând două desene, al doilea fiind obținut prin „micșorarea" primul desen.

Desenele „seamănă”, dar nu pot fi făcute să coincidă prin suprapunere. Orice segment din primul desen nu este congruent cu segmentul corespunzător din al doilea, însă raportul lungimilor lor este același. Unghiul a două drepte din primul desen este congruent cu unghiul corespunzător din cel de-al doilea.

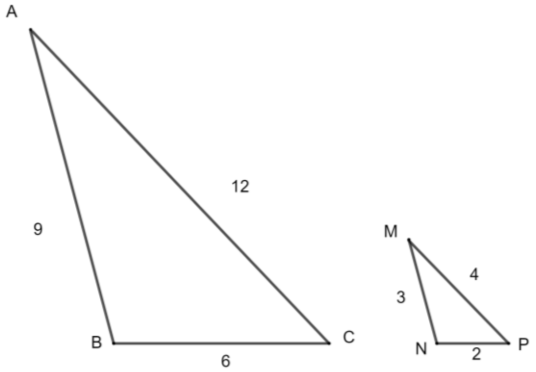
La fel sunt realizate două hărți ale aceleiași regiuni făcute la scări diferite.





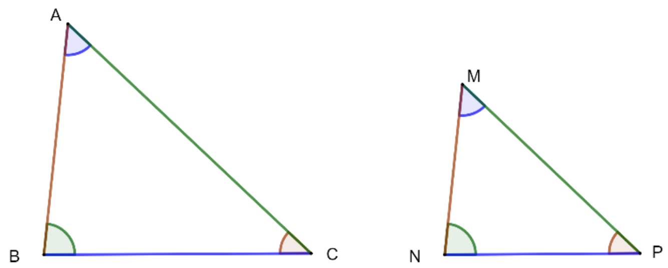
Considerând cea mai simplă figură geometrică - triunghiul - ajungem la definiția de mai jos.

Două triunghiuri sunt ***asemenea*** dacă au unghiurile corespondente congruente și laturile corespondente proporționale.

Desenăm	Citim	Scriem
	*triunghiul ABC* este asemenea cu *triunghiul MNP*	$\Delta ABC \sim \Delta MNP$

Dacă $\Delta\, ABC \sim \Delta\, MNP$ atunci avem:

- $\sphericalangle A = \sphericalangle M$
- $\sphericalangle B = \sphericalangle N$
- $\sphericalangle C = \sphericalangle P$
- $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP} = k$
- k se numește raport de asemănare



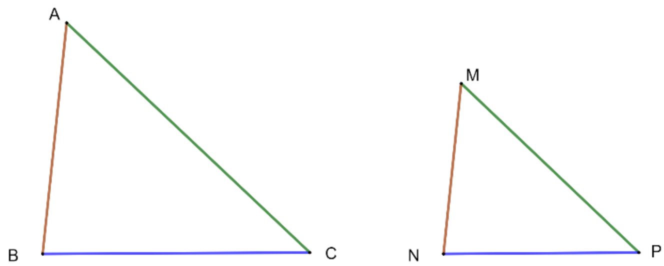
Cum recunoaștem două triunghiuri asemenea

Două triunghiuri sunt asemenea dacă

1. măsurând laturile obținem trei perechi de laturi proporționale. (fiecare pereche are o latură din fiecare triunghi) - Cazul (L.L.L.)

   Dacă $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP} = k$

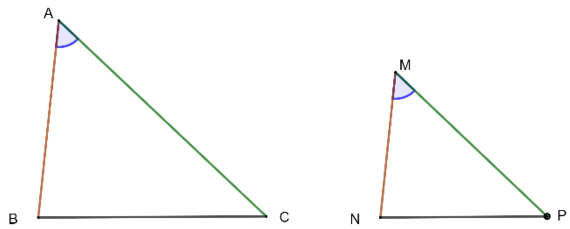
   atunci $\Delta\, ABC \sim \Delta\, MNP$.



2. măsurând găsim două perechi de laturi proporționale și unghiurile dintre ele egale - Cazul (L.U.L.)

   Dacă
   - $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = k$
   - $\sphericalangle A = \sphericalangle M$

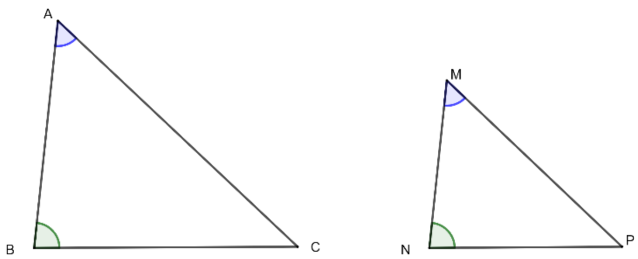
   atunci $\Delta\, ABC \sim \Delta\, MNP$



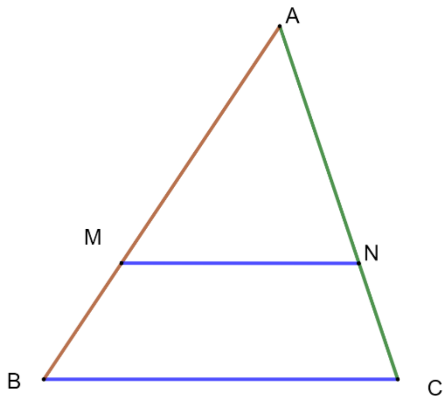
3. măsurând găsim două perechi de unghiuri congruente - Cazul (U.U.)

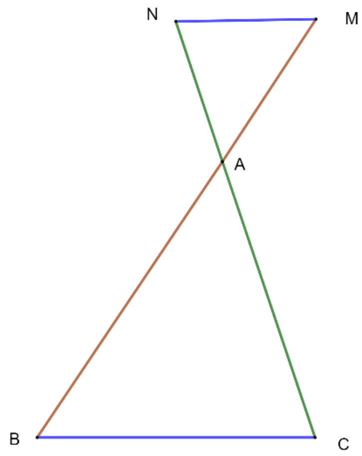
   Dacă
   - $\sphericalangle A = \sphericalangle M$
   - $\sphericalangle B = \sphericalangle N$

   atunci $\Delta\, ABC \sim \Delta\, MNP$



4. O paralelă dusă la una din laturile unui triunghi determină cu celelalte două laturi (sau cu prelungirile acestora) un triunghi asemenea cu cel dat. (*Teorema fundamentală a asemănării*)

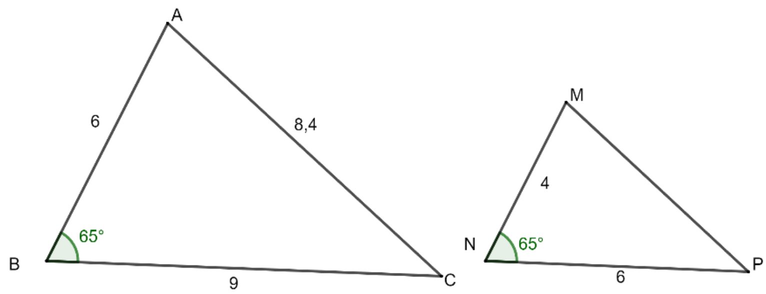




$MN \parallel BC$ rezultă $\Delta\, AMN \sim \Delta\, ABC$ $\quad$ $MN \parallel BC$ rezultă $\Delta\, AMN \sim \Delta\, ABC$

Exemplu:

✎ Arătați că triunghiurile ABC și MNP sunt asemenea, stabiliți raportul de asemănare și determinați lungimea segmentului MP.



Dacă $\sphericalangle B = \measuredangle N = 65°$

$\frac{AB}{MN} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$\frac{BC}{NP} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

atunci $\Delta\, ABC \sim \Delta\, MNP$ și

- raportul de asemănare este $\frac{AB}{MN} = \frac{3}{2}$.
- $\frac{AC}{MP} = \frac{3}{2}$ adică $\frac{8{,}4}{MP} = \frac{3}{2}$ deci $3\,MP = 16{,}8$ și $MP = 5{,}6\ cm$

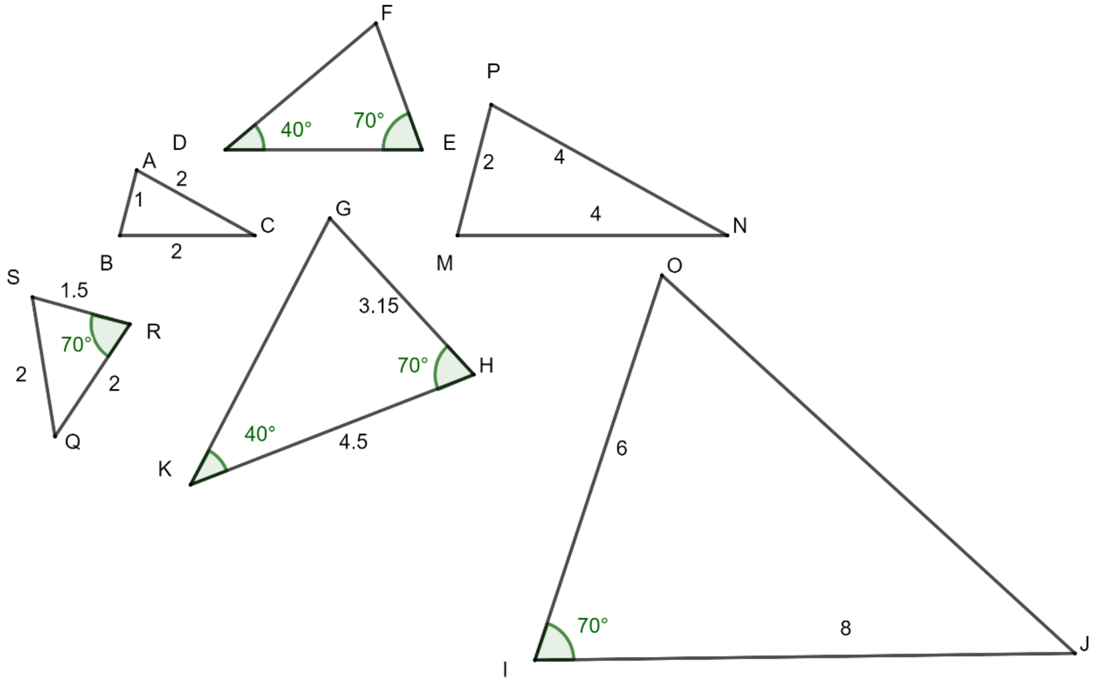
UNIUNEA EUROPEANĂ

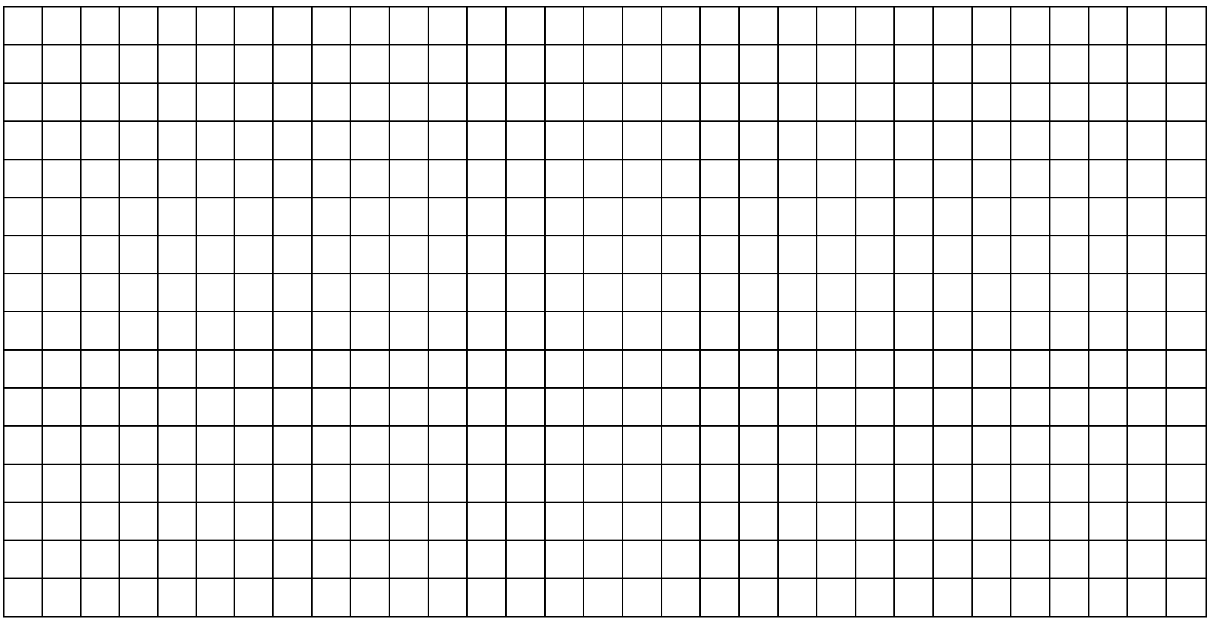
GUVERNUL ROMÂNIEI

Instrumente Structurale 2014-2020

Să exersăm !

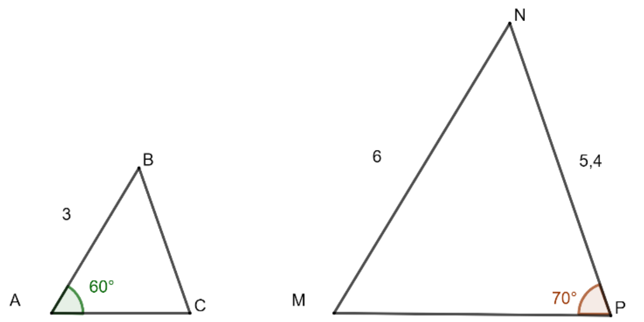
1. Găsiți în figura de mai jos perechile de triunghiuri asemenea și stabiliți în fiecare caz raportul de asemănare.





2. În triunghiul ABC, măsura unghiului $\sphericalangle BAC = 60°$ și $AC = 3\ cm$, iar în triunghiul MNP măsura unghiului $\sphericalangle MPN = 70°$ și $MN = 6\ cm$,iar $NP = 8\ cm$. Dacă $\Delta\ ABC \sim \Delta\ MNP$ atunci

a) calculați măsura unghiului $\sphericalangle ACB$;

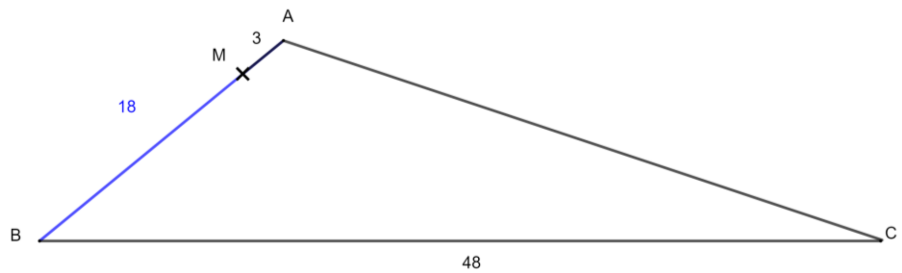


b) calculați măsura unghiului $\sphericalangle ABC$;

c) calculați raportul de asemănare al celor două triunghiuri;

d) calculați lungimea segmentului BC.

3. Pe latura AB a triunghiul ABC, $AB = 18\ cm, BC = 48\ cm$, alegem punctul M situat la distanta de 3 cm față de A. Paralela prin M la BC intersectează AC în N şi $AN = 6\ cm$.
   a) Completați figura alăturată cu informațiile din enunț.



   b) Stabiliți dacă $\Delta\ ABC \sim \Delta\ AMN$.

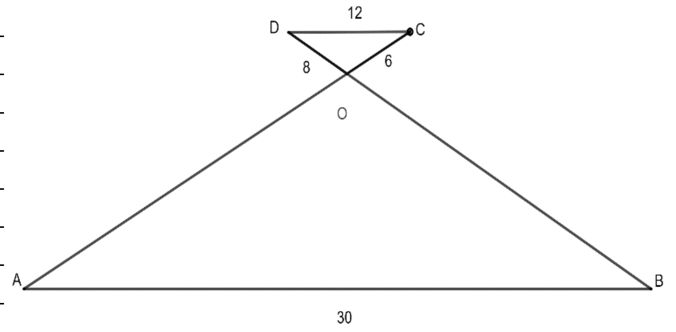
   c) Calculați perimetrul triunghiului AMN.

4. În figura alăturată dreptele AB și CD sunt paralele, iar $AB = 30\ cm, CA = 12\ cm, OC = 6\ cm$, iar $OD = 8\ cm$.

UNIUNEA EUROPEANĂ

Instrumente Structurale 2014-2020

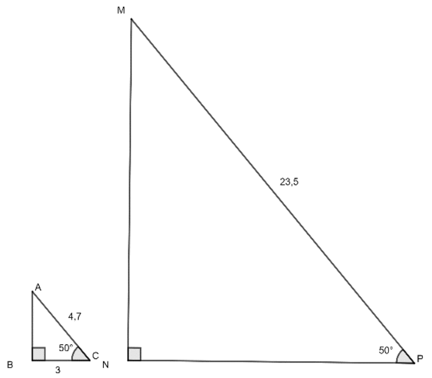
a) Stabiliţi dacă $\Delta\, COD \sim \Delta\, AOB$.



b) Calculaţi perimetrul triunghiului AOB.

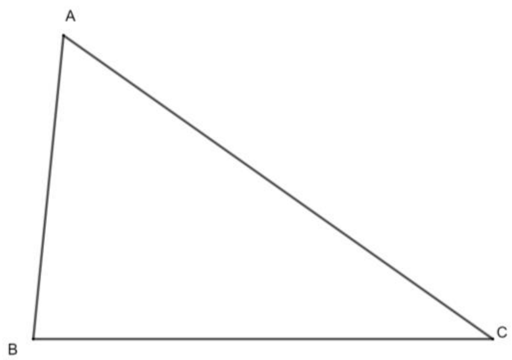
5. În triunghiurile dreptunghice ABC şi MNP în B respectiv N avem $\sphericalangle ANC = \sphericalangle MPN = 50°$ şi $BC = 3\ cm$, iar $AC = 4{,}7\ cm$ respectiv $MP = 23{,}5\ cm$.

a) Stabiliţi dacă $\Delta\, BAC \sim \Delta\, NMP$.



b) Calculați perimetrul triunghiului AOB.

6. Decupați triunghiul ABC din figura de mai jos. Construiți cu ajutorul acestui decupaj un triunghi asemenea cu acesta și laturile cu lungimea 3 ori mai mare.



Probleme practice de determinare a diferitelor măsuri. Modelarea unor configurații uzuale

1. Determinarea laturilor unui triunghi dreptunghic

În matematică există unele concepte și teoreme care sunt considerate piloni fundamentali. Acestea sunt idei care stau la baza multor descoperiri și aplicații practice. Unul dintre aceste concepte de bază este Teorema lui Pitagora. Numele acestei teoreme provine de la marele matematician grec Pitagora, care a trăit în secolul al V-lea î.Hr. Deși Teorema lui Pitagora a fost formulată și utilizată înainte de el de către alte civilizații antice, cum ar fi egiptenii și babilonienii, Pitagora a reușit să o prezinte și să o demonstreze într-o manieră generală.

Teorema lui Pitagora stabilește o relație matematică fundamentală în geometrie, care se aplică triunghiurilor dreptunghice.

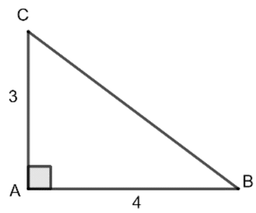
Teorema lui Pitagora afirmă că:
pătratul lungimii ipotenuzei (latura opusă unghiului drept) a unui triunghi dreptunghic este egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi(catete).

Exemple:

✎ În triunghiul dreptungic ABC, măsura unghiului $A = 90°$, iar $AB = 4\ cm$ şi $AC = 3\ cm$. Determinaţi lungimea ipotenuzei BC.
Din Teorema lui Pitagora(T.P) se obţine

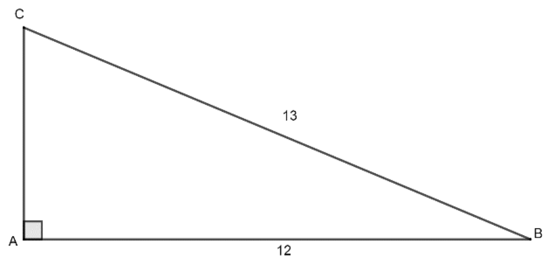
$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$4^2 + 3^2 = BC^2 \Longrightarrow BC^2 = 25 \Longrightarrow BC = 5\ cm$$



✎ În triunghiul dreptungic ABC, măsura unghiului $A = 90°$, iar $AB = 12\ cm$ şi $BC = 13\ cm$. Determinaţi lungimea laturii AC.
Din Teorema lui Pitagora(T.P) se obţine

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

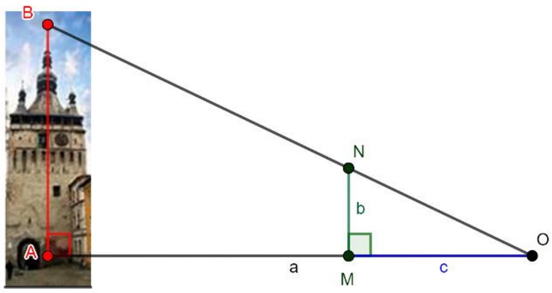


$$12^2 + AC^2 = 13^2 \Longrightarrow 144 + AC^2 = 169 \Longrightarrow AC^2 = 25 \;\Longrightarrow AC = 5\,cm$$

2. Aproximarea înălțimii unui obiect foarte înalt

Ne propunem să calculăm de exemplu înălțimea Turnului cu ceas din Sighișoara.

Măsurăm distanța de la baza turnului la punctul exterior unde ne aflăm, distanța $OA = a$. Plasăm între raza vizuală care merge spre vârf și cea care merge spre punctul de la bază, pe verticală, o mărime cunoscută $MN = b$ și măsurăm distanța $OM = c$. Avem acum date suficiente pentru a determina înălțimea turnului.



Dreptele AB și DE sunt paralele (ambele au direcția verticală) deci $\Delta ABC \sim \Delta EDC$. Deci $\frac{AB}{MN} = \frac{AO}{MO}$ deci $AB = \frac{MN \cdot AO}{MO}$.

Practic am măsurat $AO = 32\,m,\; MN = 1\,m, MN = 0{,}5\,m$ deci $AB = 64\,m$.

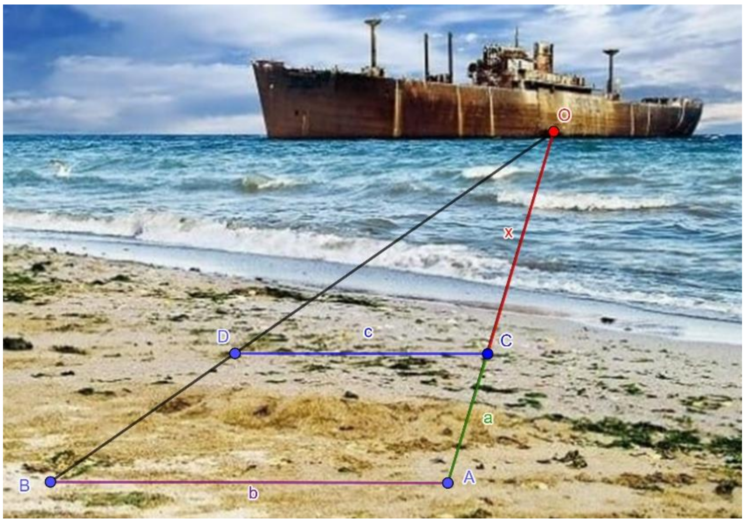
3. Aproximarea distanței până la un punct fix inaccesibil

Suntem într-un punct A pe plajă (la Costinești) și vrem să estimăm distanța până la un vapor (epavă) aflat în larg, în punctul O.

Iată o posibilă variantă în figura alăturată. Ne deplasăm din punctul A până în punctul B, măsurând distanța $AB = b$.

Marcăm pe nisip direcțiile BO și AO.

Pe direcția AO considerăm punctul C la distanța a față de A, prin care ducem o paralelă la AB. Aceasta intersectează dreapta BO în D. Măsurăm lungimea $CD = c$.



În triunghiul OAB, cu AB ∥ CD implică $\Delta\, OAB \sim \Delta\, OCD$ și $\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD}$, deci $\frac{x+a}{x} = \frac{b}{c}$ de unde $\frac{x}{x} + \frac{a}{x} = \frac{b}{c}$. Se obține $\frac{a}{x} = \frac{b-c}{c}$ și $x = \frac{a \cdot c}{b-c}$.

Practic am măsurat $AC = 50\,m,\; AB = 31\,m,\; CD = 30\,m$ deci $AB = \frac{50 \cdot 30}{31-30} = 1500\,m$.

4. Aproximarea distanței dintre două un puncte fixe inaccesibile

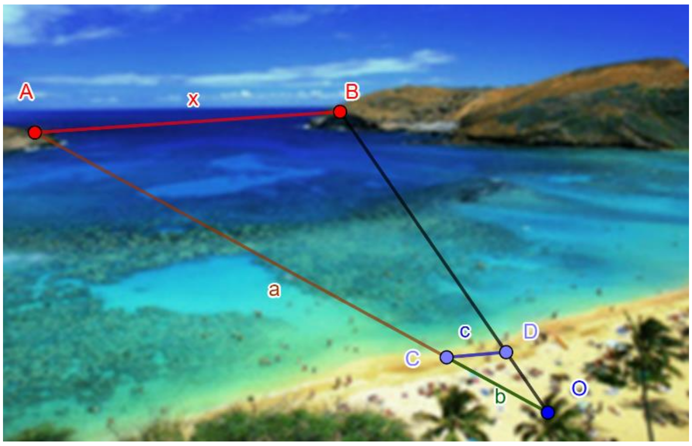
Suntem într-un punct O pe plajă (în Caraibe) și vrem să estimăm distanța dintre insulele A şi B.

Iată o posibilă variantă în figura alăturată. Marcăm pe nisip direcțiile BO și AO. Măsurăm cum am făcut mai devreme distanța $OA = a$.

Pe direcția OA ne deplasăm din punctul O până în punctul C, măsurând distanța $OC = b$.

Pe direcția AO considerăm punctul C la distanța b față de O, prin care ducem o paralelă la AB. Aceasta intersectează dreapta BO în D. Măsurăm lungimea $CD = c$.

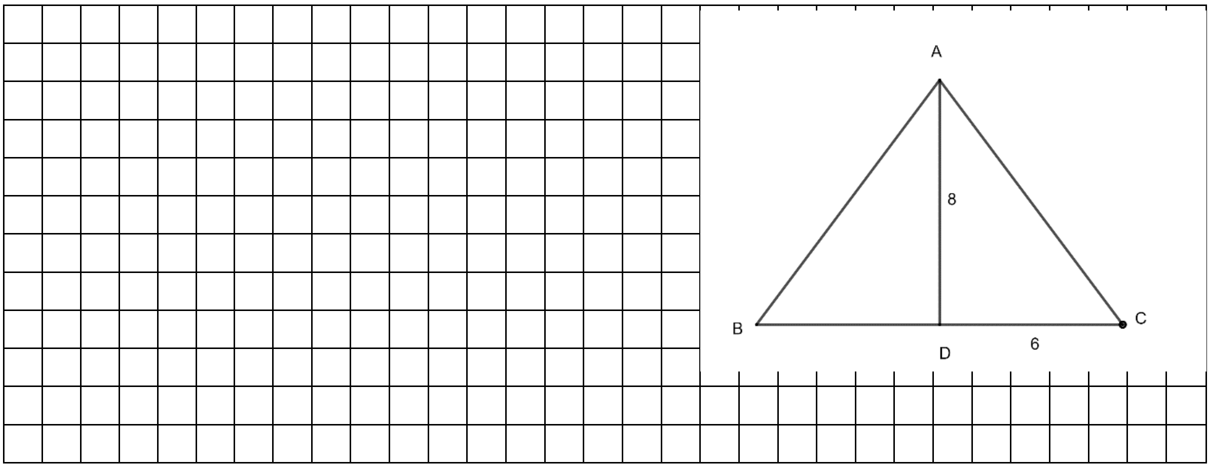
În triunghiul OAB, cu AB ∥ CD implică $\Delta\, OAB \sim \Delta\, OCD$ și $\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD}$, deci $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$ de unde $x = \frac{a \cdot c}{b}$.



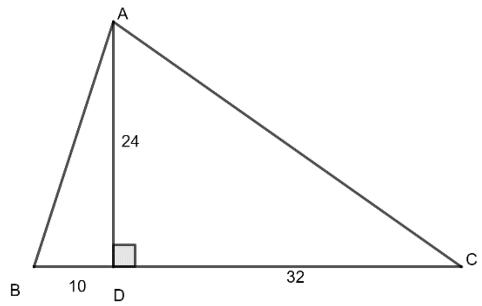
Practic am măsurat $AO = 500\, m,\ CO = 1\, m,\ CD = 3\, m$ deci $AB = \frac{500 \cdot 3}{1} = 1500\, m.$

Să exersăm!

1. Alina are o grădină în formă de triunghi isoscel notat ABC, $AB = AC$. În gradină are o fântână plasată în punctul D, mijlocul laturii BC. Distanța de la A la D este de $8\, m$, iar de la D la C este de $6\, m$. Vrea să construiască un gard pentru această grădină. Determinați lungimea acestui gard.

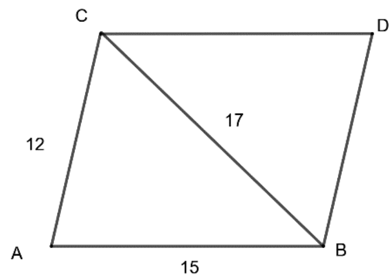


2. Diana are o grădină în formă de triunghi. Schița ei este reprezentată în figura alăturată de triunghiul ABC. În gradină are o fântână plasată în punctul D pe latura BC. Distanța de la A la D este de $24\ m$, de la D la C este de $32\ m$, de la D la B este de $10\ m$. Vrea să construiască un gard pentru această grădină. Determinați lungimea acestui gard, dacă direcția AD este perpendiculară pe direcția BC.



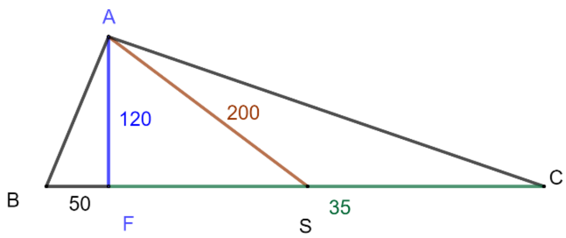
3. Marian are un teren în formă de triunghi având laturile de lungimi $12\ m$,$15\ m$ respectiv $17\ m$. Schița acestui lot este reprezentată în figura alăturată de triunghiul ABC. Vecinul lui Ion are un lot lipit de al acestuia, reprezentat de triunghiul BCD. Ion nu a putut să măsoare dimensiunile terenului său, dar știe că latura BD este paralelă cu latura AC, iar latura CD este paralelă cu latura AB a lotului lui Marian.

   a) Stabiliți dacă cei doi vecini au loturi egale.



b) Cei doi vor să împrejmuiască cu un gard întreaga suprafață, fără gard între ei. Determinați lungimea gardului construit de cei doi.

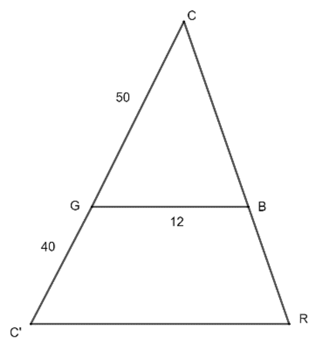
4. O schiță a noului parc din oraș este reprezentată de figura alăturată. Punctele A, B, C reprezintă locuri de intrare în parc, punctul F o fântână arteziană, în punctul S este amplasată statuia lui Mihai Viteazul. Distanța de la intrarea B la fântâna arteziană este de 50 m de la intrarea A la fântâna arteziană este de 120 m, iar de la intrarea C la fântâna arteziană este de 350 m. De la intrarea A statuie este o distanță de 200 m. În plus direcția AD este perpendiculară pe direcția BC.



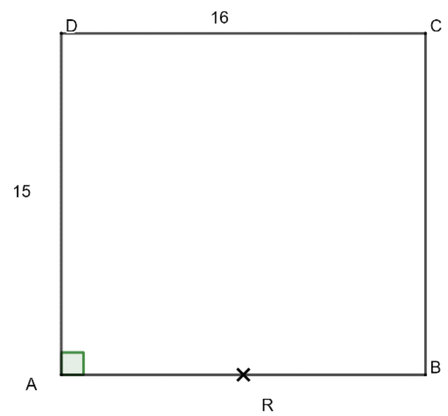
a) Determinați distanța de la fântâna arteziană la statuie.

b) Determinați lungimea gardului care împrejmuiește parcul.

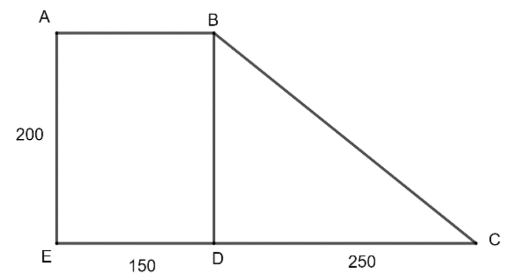
5. O hartă schematică a județului Dolj arată ca în figura alăturată. C - reprezintă orașul Craiova, G - localitatea Giubega, B - orașul Băilești, C' orașul Calafat, iar R - localitatea Rast. Distanța $GC' = 40\ km, CG = 50\ km,$ iar $GB = 12\ km$. Dacă direcția GB este paralelă cu direcția $C'R$ determinați distanța Calafat-Rast.



6. Dan are în curte o piscină dreptunghiulară cu lungimea de 16 m şi lăţimea de 15 m. La jumătatea lungimii bazinului vrea să monteze un reflector care bate la o distanţă de 17 m. Stabileşte dacă va fi luminată întreaga piscină.



7. Vasile are o livadă cu meri. Schiţa ei este reprezentată de figura alăturată. Este formată dintr-un dreptunghi $ABDE$ unde $AB = 150m$, iar $BD = 200m$ şi triunghiul dreptunghic BDC, $\sphericalangle BDC = 90°$, unde $CD = 250\ m$. Vasile vrea să îşi protejeze livada de dăunători. A găsit un dispozitiv care acţionează pe o rază de $250m$.
Stabiliţi dacă amplasa dispozitivul în punctul D va fi protejată întreaga livadă.



8. Teme de portofoliu „***Despre distanțe”:***
    - Determinați înălțimea celui mai înalt copac din apropierea școlii.
    - Determinați distanța dintre casa voastră și cea a vecinului (fără a intra la el în curte).